൞ Suite numérique ൞

Énoncé

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0{,}02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Centre étranger juin 2015

Correction

On considère a suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

a. g est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = \left(2\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - \mathrm{e}^{x} - 1\right) = 2X^2 - X - 1$ en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.
$2X^2 - X - 1$ a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$ donc $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X + \dfrac{1}{2}\right) = (X-1)(2X+1)$.
On en déduit : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$

b. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $2\mathrm{e}^{x} + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
$\mathrm{e}^{x-1} = 0$ pour $x = 0$ et $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 1 \iff x > 0$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g a donc pour minimum 0, atteint pour $x = 0$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}\right) - u_n = g\left(u_n\right) \geqslant 0$ puisque le minimum de g est 0.
On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

- **Initialisation :** $u_0 = a \leqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n \leqslant 0$.
On a : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_n} \leqslant 1$ d'où
$\mathrm{e}^{u_n} - 1 \leqslant 0$.
Comme $\mathrm{e}^{u_n} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant 0$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b. La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers un réel $\ell \leqslant 0$.

c. On suppose que $a = 0$. Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Comme $u_n \geqslant a > 0$, tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de g sur $[0\,;\,=\infty[$, on a $g(u_n) \geqslant g(a)$ donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)}$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $a + n \times g(a) = a + 0 \times g(a) = a$; or $u_n \geqslant a$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. La propriété est initialisée.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier n quelconque,
  $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
  Alors : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \iff u_{n+1} = u_n + g(u_n)$
  $\geqslant \left(a + n \times g(a))\right) + g(u_n)$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
  Or $u_n \geqslant a > 0$ donc $g(u_n) \geqslant g(a)$ puisque la fonction g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
  Par conséquent $\geqslant \left(a + n \times g(a))\right) + g(u_n) \geqslant a + n \times g(a) + g(a)$
  $= a + (n+1)g(a)$.
  La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \geqslant a + n \times g(a)}$.

c. $a > 0$ donc $g(a) > g(0) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(a + n \times g(a)\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \boxed{+\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

a. La partie à compléter de l'algorithme est :

Tant que $u \leqslant M$
u prend la valeur $\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^u - 1\right)$
n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que

b. Pour $M = 60$, on trouve $\boxed{n = 36}$